

文章编号: 1000-7598-(2003)06-1011-05

# 固结问题无单元法解的影响因素分析

王志亮<sup>1</sup>, 徐庆华<sup>2</sup>, 殷宗泽<sup>1</sup>

(1. 河海大学 土木工程学院, 江苏 南京 210098; 2. 浙江省水利河口研究院, 浙江 杭州 310020)

**摘要:** 无单元法是求解比奥固结问题的一种新型数值方法。在采用罚函数法处理本质边界条件的基础上, 推导出无单元伽辽金法解固结问题的系统方程。并着重讨论了计算域内结点分布方式、结点影响域的形状和大小、数值积分方案、惩罚因子等因素对结点位移、超孔隙水压力等的计算结果精度的影响。通过比较、分析, 分别提供出相应的取值范围, 或给出了参考性建议。

**关键词:** 无单元法; 惩罚因子; 节点影响域; 数值积分方案; 节点分布方式; 涟漪现象

**中图分类号:** O242.2

**文献标识码:** A

## Analysis of influencing factors in solutions to consolidation problem using meshless method

WANG Zhi-liang<sup>1</sup>, XU Qin-hua<sup>2</sup>, YIN Zong-ze<sup>1</sup>

(1. College of civil Engineering, Hohai University, Nanjing 210098, China; 2. Institute of water conservancy and bayou, Hangzhou 310020, China)

**Abstract:** Meshless method is a new type numerical method of solving the Biot's consolidation problem. On the basis of treating the essential boundary conditions with penalty method, the system equations of consolidation problem with meshless method are developed. Then the factors which influence the accuracy of nodes displacements, excess pore water pressures including the mode of nodes arrangement in the calculation domain, the shape and size of the influencing domain, the numerical integral scheme and penalty parameter are discussed. By analysis and comparisons, the corresponding value scope or reference suggestion are provided.

**Key words:** meshless method; penalty parameter; influencing domain of node; numerical integral scheme; mode of nodes arrangement; oscillation phenomenon

## 1 前言

固结问题是岩土工程中一个古老课题, Terzaghi (1925年) 固结理论只适应于一维情况; Biot (1941年) 固结理论才是“真三维固结理论”。由于数学上的困难, Biot 固结理论曾被束之高阁达 30 年之久, 目前, 随着计算机技术的发展, 该理论的数值分析方法主要有以下几种: 差分方法、有限单元法、边界元法、加权残值法、半解析法、有限层法等。本文首先简略介绍了无单元法求解比奥固结问题思路, 然后, 针对该法中影响求解精度的主要因素展开了具体讨论, 并得出了各影响因素的参考性结论和建议。

## 2 无单元伽辽金法解固结问题

### 2.1 无单元伽辽金法

无单元伽辽金法是基于移动最小二乘法 (Moving Least Square) 思想来构造形函数的。它的特点是只需要节点而不需要单元信息。文献[1~5]具体地介绍了该法及其在工程中的应用。

该法得出的形函数表达式如下:

$$\phi(x) = p^T(x) A^{-1}(x) B(x) \quad (1)$$

其中:

$$A(x) = \sum_{i=1}^n w(x - x_i) p(x) p^T(x) \quad (2)$$

$$B(x)=[w_1(x)p(x_1) \ w_2(x)p(x_2) \cdots \cdots w_n(x)p(x_n)] \quad (3)$$

在本文讨论中, 基向量  $p(x)$  选择线性基; 权函数  $w_i(x)$  取三次样条函数。

## 2.2 比奥固结理论

该理论在很多文献中都有介绍<sup>[6~8]</sup>。本文是在土、水混合物的平衡方程及连续性方程基础上, 结合平面应变下固结问题的初始条件及边界条件推导出系统矩阵方程<sup>[7]</sup>。

## 2.3 系统方程

对于函数  $f(x)$  在  $\Delta t$  时刻内, 采用的时间域积分公式为

$$\int_t^{t+\Delta t} f(t)dt = \Delta t[(1-\theta)f(t) + \theta f(t+\Delta t)] \quad (4)$$

式中  $0 \leq \theta \leq 1$ 。

结合平衡方程及连续性方程并考虑本质边界条件, 最后可得平面应变固结问题的系统方程:

$$([K] + [K^u])\{g\} = \{f\} + \{f^u\} \quad (5)$$

式中  $[K^u]$  和  $\{f^u\}$  来源于本质边界条件项; 程序中位移采用增量形式, 孔压采用全量形式表示,  $\{g\}$  列阵同时包含有位移项和孔压项。

$$[K_{ij}] = \int_{\Omega} [K'_{ij}] d\Omega \quad (6)$$

设土体变形模量为  $E$ , 泊松比为  $\nu$ , 则有:

$$[K'_{ij}] = \begin{bmatrix} (1-\nu)d_1\xi + \frac{1-2\nu}{2}d_4\xi & \frac{1-2\nu}{2}d_2\xi + \nu d_3\xi & -\phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \\ \nu d_2\xi + \frac{1-2\nu}{2}d_3\xi & \frac{1-2\nu}{2}d_1\xi + (1-\nu)d_4\xi & -\phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \\ -\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} & -\phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y} & K_{33}^* \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \\ K_{33}^* &= -\theta \frac{\Delta t}{\gamma_w} (k_x d_1 + k_y d_4) \\ d_1 &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x}, \quad d_2 = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} \\ d_3 &= \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial y}, \quad d_4 = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \frac{\partial \phi_j}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

式中  $k_x, k_y$  分别为  $x, y$  方向上渗透系数;  $\gamma_w$  是水的重度。

第  $i$  点处的荷载列向量如下:

$$\{f_i\} = \int_{\Omega} \phi_i \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Omega} \phi_i \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} f_{oi} d\Omega \quad (9)$$

式中  $f_{oi}$  表示由前期应力、节点孔压转化而来的本期第  $i$  点的相应荷载分量;  $\mathbf{b}$  是单位体应力;  $\bar{\mathbf{t}}$  表示确定的边界  $\Gamma$  上面力。

$$[K_{ij}^u] = \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_i S \phi_j d\Gamma \quad (10)$$

$$[f_i^u] = \alpha \int_{\Gamma_u} \phi_i S \bar{u} d\Gamma \quad (11)$$

其中:  $\bar{u}$  为边界上位移矢量;  $S = \begin{bmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_2 \end{bmatrix}$  且

$$S_i = \begin{cases} 1 & u_i \text{ 在 } \Gamma_u \text{ 上} \\ 0 & u_i \text{ 不在 } \Gamma_u \text{ 上} \end{cases}.$$

## 3 数值算例及影响因素分析

### 3.1 数值算例

一个经典的二维固结问题见图 1, 设粘土层上部是渗透性边界, 其余的均为不渗透性边界, 且假设两侧和底部位移固定。一个大小为 10 kPa 的条形均布荷载作用在上表面长 8 m 的中心区域内, 粘土层长度为 48 m, 厚度为 16 m。土被认为是线弹性体。土体参数如下: 弹性模量  $E = 40\ 000$  kN/m<sup>2</sup>, 泊松比  $\nu = 0.3$ , 渗透系数  $K_x = K_y = 1.782 \times 10^{-3}$  m/d。

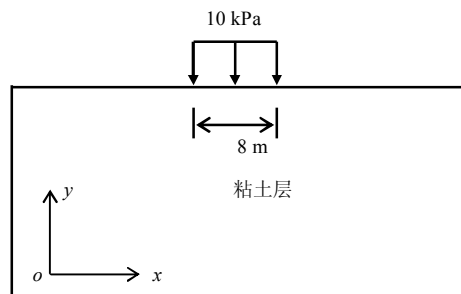


图 1 经典平面应变固结问题

Fig.1 Typical consolidation problem of plane strain

这是一个平面应变固结问题。现分别采用随机节点分布和均匀节点分布方式对计算域进行离散 (图 2 和图 3)。同时, 为了计算方便, 还选取 7 个特定点作为参考点 (表 1)。

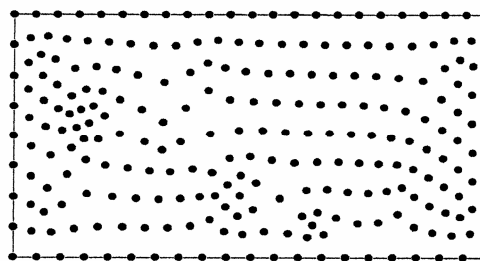


图 2 随机结点分布图

Fig.2 Arrangement of random nodes

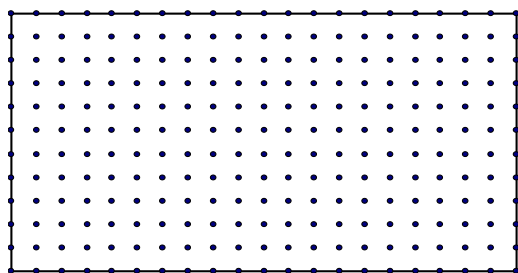


图3 均匀结点分布图

Fig.3 Uniform arrangement of nodes

表1 选取的7个特定点及其位置(单位: m)  
Table 1 Specially selected 7 points and their positions  
& coordinates (unit: m)

| 点号  | 所在位置   | 坐标             |
|-----|--------|----------------|
| 215 | 均匀分布图上 | (24.0, 12.8)   |
| 228 | 均匀分布图上 | (24.0, 2.40)   |
| 232 | 随机分布图上 | (25.37, 14.80) |
| 126 | 随机分布图上 | (25.93, 9.48)  |
| 149 | 随机分布图上 | (22.13, 3.85)  |
| 9   | 随机分布图上 | (24.0, 16.0)   |
| 211 | 均匀分布图上 | (24.0, 16.0)   |

### 3.2 影响因素分析

#### (1) 结点分布方式

无单元法对于计算域中节点的分布方式主要有两种——随机分布和均匀分布。针对图1中的粘土层区域,若用随机点分布方式,共有252个节点,444个积分子域(图2);若用均匀结点分布方式,共有252个节点,440个积分子域(图3)。图4是分别用两种节点分布方式对坐标为(24, 16)处点(均匀分布上为点211,随机分布上为点9)的地表沉降进行了计算和对比。由图4可知,该点的沉降随时间延长、孔压消散而逐渐增大,并渐趋稳定。两种节点分布方式得出的结果比较吻合,相差甚微。所以实际计算中,不管采用何种节点分布方式其最后结果都不会出现太大的误差。

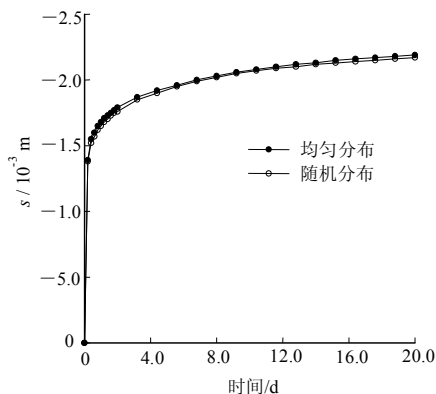


图4 不同结点分布方式下点(24, 16)处沉降时间曲线  
Fig.4 Curves of settlement versus time at point (24, 16) for different nodes arrangement modes

#### (2) 结点影响域的形状

在无单元法中,权函数起重要作用。它要求在点 $x_i$ 的邻近区域内非零,形状一般为钟形,在节点处取得最大值,与该节点对称。这个 $x_i$ 的较小的邻域就称为节点 $x_i$ 的影响域,常用的节点影响域形状有圆形和方形两种。本文的权函数形式如下:

$$w(r) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4r^2 + 4r^3 & (0 < r \leq \frac{1}{2}) \\ \frac{4}{3} - 4r + 4r^2 - \frac{4}{3}r^3 & (\frac{1}{2} < r \leq 1) \\ 0 & (r > 1) \end{cases} \quad (12)$$

对于方形域:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= \frac{x - x_i}{|x - x_i| d_{mi}} \\ \frac{dr}{dy} &= \frac{y - y_i}{|y - y_i| d_{mi}} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

且 $w = w(x)w(y)$ 。

对于圆形域:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dr}{dx} &= \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} d_{mi}} \\ \frac{dr}{dy} &= \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} d_{mi}} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

式中 $d_{mi}$ 为节点 $x_i$ 的影响域半径,本文取为2.5。

根据式(12)~(14)很容易求出两种情形下的权函数导数表达式。

图5是分别用节点的圆形域和方形域计算得出的均匀节点分布上的点215和228处的超孔隙水压力(下称孔压,图中用 $P$ 表示)变化曲线,二者结果吻合得很好。实际计算使用哪种影响域一般均可

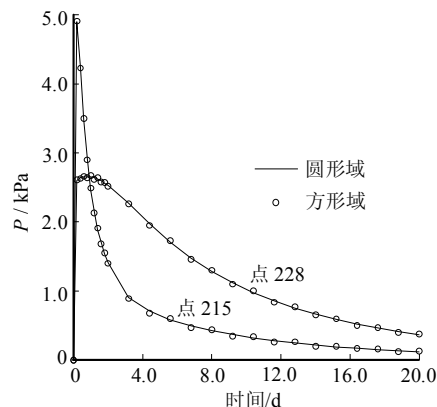


图5 不同影响域形状得出的超孔压曲线  
Fig.5 Curves of excess pore water pressure versus time for different influencing domain shapes

满足工程要求,若要得到高精度的结果,建议采用圆形结点影响域。

### (3) 节点影响域的尺寸

无单元伽辽金法是通过积分域内的高斯点或边界上节点循环来构造形函数,同时组装式(5)中矩阵 $[K]$ ,  $\{f\}$ ,  $[K^u]$ 和 $\{f^u\}$ 等来进行求解的。节点影响域的大小决定相邻节点的数目,从而影响插值的准确性,甚至导致曲线的涟漪。图6显示了当选择 Crank-Nicolson 积分方案的时域内最小结点数对随机点分布上的 149 点孔压消散过程的影响情况。最小节点数(例如 4 节点)可按下述方式确定:当域内包含的结点少于 4 个时,影响域增大 1.5 倍,以确保包含的最少节点数为 4 个,最大节点数设定为 30 个。由图 6 可知,当域内最小节点数少于 8 时,点 149 处的孔压曲线未出现涟漪现象。当最少节点分别取 4, 6 和 8 时,结果基本相同。若节点数小于或等于 2 时,会出现病态矩阵,求解失败。一般情况下,建议最少节点数不宜太大,可在 2~9 之间取值。

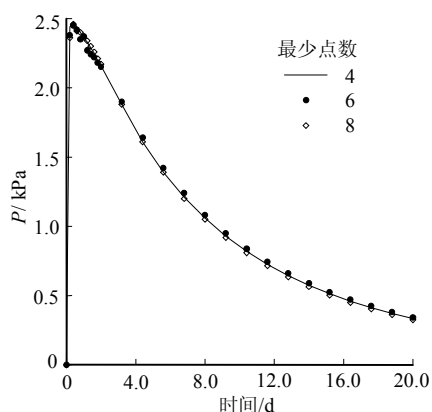


图 6 不同影响域的尺寸对孔压的关系曲线  
Fig.6 Curves of excess pore water pressure vs time for different Influencing domain sizes

### (4) 数值积分方案

对于任何函数  $f(t)$  在  $\Delta t$  时刻内,本程序中采用的时间域积分公式为

$$\int_t^{t+\Delta} f(t) dt = \Delta t [\theta f(t) + (1-\theta)f(t+\Delta t)] \quad (15)$$

式中  $0 \leq \theta \leq 1$ 。时间积分参数  $\theta$  对解的准确性、稳定性及波动性有重要的影响。如何选择恰当的积分方案对无单元的计算结果是至关重要的。常见的积分方案如下:  $\theta=0.5$  为 Crank-Nicolson 方案;  $\theta=1.0$  为 Backward-Euler 方案;  $\theta=2/3$  为 Zienkiewicz 方案。此处主要讨论无单元中常用的前两种方法。

图 7 是对随机节点分布中点 232 和点 126 处的

孔隙水压力用两种不同的积分方案得出的结果,并与有限元解相比较。由图可知,两种积分方案得出的结果与有限元解(由有限元软件 PLAXIS 完成)都比较吻合。但是, Crank-Nicolson 方案,在时间步长  $\Delta t$  取较大值时(0~2 d 内,  $\Delta t=0.2$  d; 2~20 d 内,  $\Delta t=1.2$  d),数值解有点涟漪。实际计算中因为该积分方案方便、快捷,特别在时间步长较小时用得还较多。当然,也可以在固结问题的计算中混合使用不同的积分方案:小时间步长用 Crank-Nicolson 方案,大时间步长用 Backward-Euler 法,这样结果更精确。

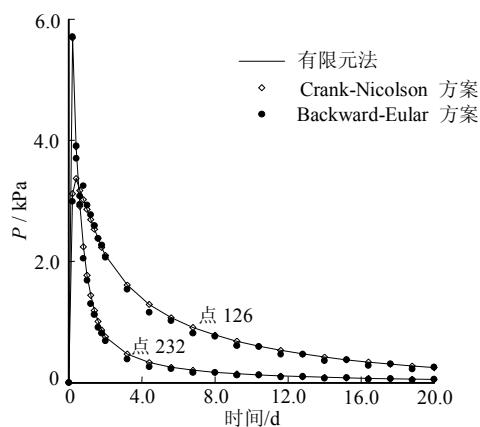


图 7 不同积分方案对结点孔压的影响  
Fig.7 Curves of excess pore water pressure vs time for different integral schemes

### (5) 惩罚因子大小

在 MLS 插值方法中,由于其形函数不象有限元形函数具有  $\delta$  函数的特点:

$$\phi(x_j) \neq \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (16)$$

对于其本质边界条件要特别处理<sup>[9]</sup>。常见的处理方法有排列法、拉格朗日算子法、罚函数法等等。本文主要采用并讨论罚函数法,并设  $\alpha$  是惩罚因子。从理论上讲  $\alpha \gg 1$  才能满足本质边界条件。但是,若  $\alpha$  取得过大,会使系统矩阵出现病态;若  $\alpha$  取得过小,又不能正确模拟本质边界条件。也就是说  $\alpha$  存在上限值和下限值。对于本文的比奥固结问题,笔者经过尝试,得知  $\alpha$  的取值范围在  $(10^2 \sim 10^9)E$  之间,其中  $E$  为土体的弹性模量。一旦超出此范围值,结果将严重失真。图 8 是  $\alpha$  分别取上、下限值时,随机节点分布中受荷域点(24, 16)处(即点 9)的地表沉降曲线和图 3 中真实结果曲线相比,大相径庭。不仅数值偏大,不能正确反应沉

降随时间变化趋势, 而且计算结果也明显出现涟漪现象。

实际计算中, 一般在上述范围内, 可根据误差标准, 反复调试后选取一个最佳值。文献[10]在用无单元分析单列纹体的应力场时, 建议 $\alpha$ 取值为 $20 \times 10^3 E$ , 其计算出的结果十分接近精确值。

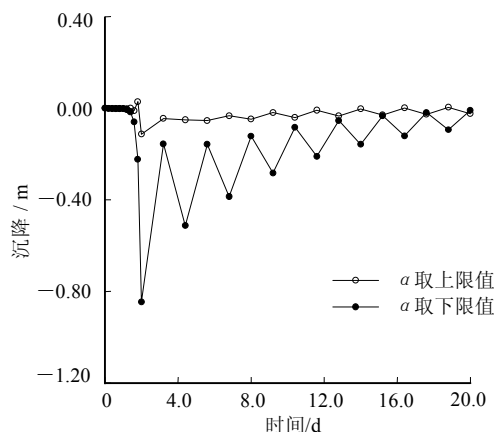


图8 不同 $\alpha$ 值时点(24, 16)处的沉降对时间曲线  
Fig.8 Curves of settlement versus time for different  $\alpha$  at point (24, 16)

## 4 结论和建议

(1) 无单元法伽辽金法是求边界值问题的一种新的数值计算方法。它既保留了目前被广泛应用的有限元的一些优点, 又克服了有限元的一些不足: 如单元网格划分工作量大, 为得到光滑梯度场而进行后期处理等等;

(2) 无单元伽辽金法解固结问题中计算域内节点的分布方式, 对计算结果影响不大。根据实际情况, 并为使计算上方便, 可任意选择随机结点分布方式或均匀结点分布方式。不过, 随机节点分布方式得出的结果更具有代表性;

(3) 无论圆形结点影响域抑或方形结点影响域得出的结果比较一致, 在实际计算中使用圆形节点影响域, 准确度可能较高些;

(4) 当节点影响域中最小节点在2~9之间取值、最大节点数设为30时, 节点的影响域尺寸效应对计算结果影响不太明显;

(5) 建议在实际计算中, 当步长不太大时, 选

用Crank-Nicolson方案; 也可以在程序中, 混合使用不同的积分方案;

(6) 为了保证计算结果的准确性和稳定性, 应根据误差等标准, 建议在 $(10^2 \sim 10^9)E$ 范围内寻求最佳惩罚因子值。

## 参考文献

- [1] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin methods [J]. **International Journal of Numerical Methods in Engineering**, 1994, 37: 229—256.
- [2] Lu Y Y, Belytschko T, Gu L. An implementation of the element-free Galerkin method [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 1994, 13: 397—414.
- [3] 周维垣, 寇晓. 无单元法及其在岩土工程中的应用[J]. **岩土工程学报**, 1998, 20(1): 5—9.
- [4] 庞作会. 一种新的数值方法—无网格伽辽金法[J]. **计算力学学报**, 1999, 16(3): 320—329.
- [5] 李卧东, 王元汉, 谭国焕. 无网格法在弹塑性问题中的应用[J]. **固体力学学报**, 2001, 22(4): 361—366.
- [6] 钱家欢, 殷宗泽. 土工原理和计算[M]. 北京: 中国水利水电出版社, 1995.
- [7] Wang Jiangguo. A point interpolation method for simulating dissipation procession of consolidation [J]. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2001, 190: 5 907—5 922.
- [8] Biot M.A. General theory of three-dimensional consolidation [J]. **Journal of Applied Physics**, 1941, (12): 155—164
- [9] Mukherjee Y X, Mukherjee S. On boundary conditions in the element-free Galerkin method[J]. **Computational Mechanics**, 1997, 19: 264—270.
- [10] 李卧东, 王元汉. 无网格法在断裂力学中应用[J]. **岩石力学与工程学报**, 2001, 21(4): 54—57.